

Scientific journal  
**PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION**  
 Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)  
 ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал  
**ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА**  
 Видається з 2013.



<http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/>

*Завражна О.М. Методичні аспекти навчання теми «Узагальнені координати». Фізико-математична освіта. 2019. Випуск 2(20). С. 35-39.*

*Zavrazhna O. Methodological Aspects Of Teaching «Generalized Coordinates». Physical and Mathematical Education. 2019. Issue 2(20). P. 35-39.*

DOI 10.31110/2413-1571-2019-020-2-006  
 УДК 378.147+530:531.3

О.М. Завражна

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка, Україна

[zavragna@gmail.com](mailto:zavragna@gmail.com)

ORCID: 0000-0002-7716-7138

## МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ НАВЧАННЯ ТЕМИ «УЗАГАЛЬНЕНІ КООРДИНАТИ»

### АНОТАЦІЯ

**Формулювання проблеми.** При підготовці фахівців фізико-математичного профілю та особливо - вчителів фізики, слід значну увагу приділяти загальним принципам, які в компактній формі містять в собі не лише всі відомі експериментальні та теоретичні положення, але й дозволяють прогнозувати нові відкриття. До таких принципів відносяться інтегральні варіаційні принципи, які вперше були сформульовані в механіці. При підготовці вчителів фізики вони починають вивчатися в курсі теоретичної фізики у першому її розділі - «Класична механіка». На відміну від загального курсу «Механіка», у якому студенти лише поглиблюють свої шкільні знання, при вивченні класичної механіки, уже на початковому етапі - при формулюванні вихідних положень аналітичної механіки вони стикаються з багатьма узагальненими і абстрактними поняттями, наприклад, «узагальнені координати», формування яких ставить перед викладачами безліч методичних проблем, які потрібно вирішити.

**Матеріали і методи.** У якості методів дослідження використовувались: системний науково-методологічний аналіз підручників і навчальних посібників, статей; спостереження навчального процесу; синтез, порівняння та узагальнення теоретичних положень; узагальнення власного педагогічного досвіду.

**Результати.** запропоновано один із можливих способів обґрунтування поняття «узагальнені координати». Згідно цього способу пропонується спочатку введення таких понять: узагальнені координати; формулювання переваг переходу до узагальнених координат; кількість узагальнених координат; рівняння руху механічної системи в узагальнених координатах.

**Висновки.** Розглянута методика дозволяє сформувати у студентів глибоке й стійке розуміння поняття «узагальнені координати» та дозволяє створити геометричний образ еволюції механічної системи у вигляді траєкторії точки у конфігураційному просторі.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** вчителі фізики, класична механіка, декартові координати, узагальнені координати, механічна система.

### ВСТУП

**Постановка проблеми.** Розвиток сучасної науки, впровадження її досягнень у виробництво та побут, прагнення вищої освіти України до підготовки фахівців, здатних працювати за європейськими стандартами, вимагає значного посилення фундаментальної компоненти в навчальному процесі (Мороз, 2012). Тому сучасні навчальні посібники і все науково-методичне забезпечення навчального процесу повинні базуватися на деяких загальних теоріях, які є фундаментом всієї теоретичної підготовки. Таким фундаментом при підготовці фахівців фізико-математичного профілю та особливо - вчителів фізики, є загальні принципи, які в компактній формі містять в собі не лише всі відомі експериментальні та теоретичні положення, але й дозволяють прогнозувати нові відкриття. Такі принципи дійсно були відкриті – це інтегральні варіаційні принципи, які вперше були сформульовані в механіці, і при підготовці вчителів фізики вони починають вивчатися в курсі теоретичної фізики у першому її розділі - «Класична механіка». Але, на відміну від загального курсу «Механіка», у якому студенти лише поглиблюють свої шкільні знання, при вивченні класичної механіки, уже на початковому етапі - при формулюванні вихідних положень аналітичної механіки вони стикаються з багатьма узагальненими і абстрактними поняттями, наприклад, «узагальнені координати», формування яких ставить перед викладачами безліч методичних проблем, які потрібно вирішити.

**Аналіз актуальних досліджень** науково-методичної літератури показує, що проблема фахової підготовки майбутніх учителів фізики широко обговорюється науковцями на сторінках педагогічних та методичних часописів в різних аспектах: із проблеми якості освіти в галузі фізики та фундаменталізації О. Бугайов, С. Гончаренко, О. Ляшенко, А. Павленко,

О. Сергєєв, М. Шут та ін.; становлення майбутнього вчителя фізики на засадах компетентнісного підходу досліджують П. Атаманчук, Г. Атанов, М. Головки, О. Ляшенко, В. Сергієнко та ін.; підвищення якості дидактичного забезпечення навчального процесу та вдосконалення фізичного навчального експерименту досліджують Л. Благодаренко, В. Величко, В. Вовкотруб, В. Заболотний, Л. Калапуша, Е. Коршак, Д. Костюкевич, О. Мартинюк; методичні аспекти вивчення певних питань курсів загальної і теоретичної фізики розглядають в своїх працях В. Мендерецький, І. Сальник, В. Сиротюк та ін.; Г. Бушок, О. Коновал, І. Мороз, М. Садовий, В. Сергієнко, Б. Сусь, І. Тичина та ін. Разом із тим, у теорії та методиці викладання теоретичної фізики практично відсутні дослідження, у яких висвітлювалися б методичні аспекти навчання аналітичної механіки, зокрема обґрунтування поняття «узагальнені координати» залишилося поза увагою методичної науки, воно зовсім не висвітлене у методичній літературі і лише фрагментарно описується в деяких навчальних посібниках (Бондаренко & Дубінін & Переяславцев, 2004; Булгаков & Яременко & Черниш & Березовий, 2017; Іванов & Максютя, 2012; Єжов & Макарець & Романенко, 2007; Литвинов & Михайлович & Бойко & Березовий, 2013), що є недостатнім і необґрунтованим.

**Тому метою даної статті** є висвітлення методичних аспектів навчання теми «Узагальнені координати», питання якої є основоположними в аналітичній механіці.

## МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У якості методів дослідження використовувалися: системний науково-методологічний аналіз підручників і навчальних посібників, статей з даної теми; спостереження навчального процесу; синтез, порівняння та узагальнення теоретичних положень, які подані у наукових та навчальних джерелах літератури; узагальнення власного педагогічного досвіду.

## РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

Узагальнюючи результати аналізу навчальних посібників і власного досвіду зупинимось детальніше на розгляді одного із можливих варіантів обґрунтування узагальнених координат та дійсних і можливих переміщень, який ми використовуємо на перших лекціях з класичної механіки.

Мета вивчення теми передбачає ознайомлення студентів з прийомом, що дозволяє перейти від прямокутних до узагальнених координат, а отже, представити фізичне явище в абстрактному математичному вигляді.

Згідно мети зміст теми розкривається за допомогою таких питань:

- узагальнені координати;
- рівняння в'язей;
- формулювання переваг переходу до узагальнених координат;
- якому випадку декартові координати точок системи залежать не лише від узагальнених координат, але й від часу;
- як визначається кількість узагальнених координат;
- як записується рівняння руху механічної системи в узагальнених координатах.

Особливістю запропонованого підходу є те, що матеріал, який викладається, систематизований та логічно згрупований, що дозволяє формувати причинно-наслідкові зв'язки між поняттями, судженнями, знаннями, теоріями, що засвоюються студентами на лекції, а потім закріплюються на практичних заняттях. Отримані знання є основою для вивчення у подальшому квантової механіки та інших розділів теоретичної фізики. Підхід успішно використовується в навчальному процесі майбутніх вчителів фізики у Сумському державному педагогічному університеті імені А.С.Макаренка.

Вивчення теми доцільно розпочати з нагадування, що за сторіччя, що минуло від Ферма і Декарта до Ейлера і Лагранжа, відбувся надзвичайно бурхливий розвиток методів вищої математики. Однією з найбільш важливих трансформаційних змін було узагальнення первинної ідеї Декарта про координати. Виявилось, що введення системи із трьох взаємно перпендикулярних осей є всього лише одним із способів встановлення взаємно однозначної відповідності між точками простору і числами. Інші способи можуть також добре служити для цієї цілі. Наприклад, замість прямокутних координат, можна взяти сферичні координати. Одна з характерних особливостей аналітичних методів механіки полягає саме в тому, що ми не накладаємо ніяких умов на природу координат, що переводять дане фізичне явище в абстрактну математичну схему.

Далі студентам пропонується розглянути механічну систему, що складається із  $N$  вільних частинок, «вільних» у тому сенсі, що вони не зв'язані ніякими кінематичними умовами (в'язями). Прямокутні координати цих частинок

$$x_i, y_i, z_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

характеризують стан механічної системи у деякий момент часу. Задача руху, природно, вважається вирішеною, якщо всі  $x, y, z$  відомі як функції часу  $t$ . Це завдання, однак, буде вирішеним і в тому випадку, якщо всі  $x, y, z$  виражені через якісь інші величини

$$q_1, q_2, \dots, q_{3N}, \quad (2)$$

а  $q$  в свою чергу визначені як функції часу  $t$ .

Такий непрямий процес розв'язання задачі про рух надає суттєві переваги, що на практиці виявляється вирішальним фактором. Ця операція в математиці називається «перетворенням координат». Вона є узагальненням переходу від прямокутних координат однієї точки  $x, y, z$  до, наприклад, її сферичних координат  $r, \varphi$  і  $\theta$ .

Узагальнення, наприклад, співвідношень

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

полягає в тому, що старі змінні можуть бути довільними функціями нових змінних. Кількість змінних для системи  $N$  матеріальних точок буде  $3N$ , так як положення розглянутої механічної системи визначається  $3N$  координатами. Отже, у загальному випадку подібне перетворення координат виглядає наступним чином

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(q_1, \dots, q_{3N}) \\ &\dots\dots\dots \\ z_N &= f_{3N}(q_1, \dots, q_{3N}) \end{aligned} \quad (4)$$

На лекції також потрібно відзначити, що функції  $f$  можемо вибрати будь-яким способом і звести початкову задачу про визначення координат матеріальних точок  $x_i, y_i, z_i$  як функцій  $t$  до нової задачі про визначення функцій  $q_1, \dots, q_{3N}$  як функцій часу. Крім того, можна так вибрати нову систему координат, щоб нова задача вирішувалась набагато простіше старої. Такі нові координати повинні бути незалежними, однозначно описувати положення матеріальних точок механічної системи у просторі і система (4) повинна бути сумісною. Такі координати будемо називати узагальненими. Повна свобода у виборі системи відліку дозволяє вибрати узагальнені координати так, щоб вони були особливо зручними для даного завдання. Наприклад, у задачі про рух планети, тобто матеріальної частинки, що рухається навколо нерухомого центру тяжіння, сферичні координати набагато краще відповідають умовам задачі, ніж прямокутні.

Перевага узагальнених координат стає більш очевидною, якщо розглядаються механічні системи із накладеними на них кінематичними в'язями. Ці умови математично виражаються певними функціональними співвідношеннями між координатами (рівняннями в'язей). Наприклад, відстань між двома атомами, що утворюють молекулу визначається рівновагою сил в середині молекули. З точки зору динаміки така система може розглядатись як така, що складається із двох частинок з координатами  $x_i, y_i, z_i$  і частинки знаходяться на постійній відстані  $a$  одна від іншої. Це призводить до умови

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = a^2, \quad (5)$$

внаслідок якої 6 координат не можуть бути задані незалежно. Досить задати 5 координат, а шоста визначиться із умови (5). Очевидно, однак, що недоцільно розглядати одну з координат в (5) як залежну змінну, оскільки співвідношення (5) симетричне щодо всіх координат. Більш природно задати три прямокутні координати центру мас системи і два кути, що визначають напрямок осі двоатомної молекули. В прямокутних координатах всі 6 координат можна виразити через ці 5 параметрів.

Далі разом зі студентами аналізується ще один приклад: тверде тіло, яке може складатися з будь-якої кількості частинок. Незалежно від числа частинок, досить задати три координати центру мас і три кути, що визначають поворот тіл відносно системи нерухомих осей. Ці 6 параметрів повністю визначають положення тіла. Координати будь-якої з його частини можуть бути виражені через ці 6 параметрів.

У загальному випадку, коли на механічну систему з  $N$  частинок накладено  $k$  незалежних кінематичних умов, конфігурація цієї системи може бути однозначно задана за допомогою

$$l = 3N - k \quad (6)$$

незалежних параметрів

$$q_1, q_2, \dots, q_l \quad (7)$$

причому прямокутні координати всіх частинок можуть бути записані як функції змінних (7):

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(q_1, \dots, q_l) \\ &\dots\dots\dots \\ z_N &= f_{3N}(q_1, \dots, q_l) \end{aligned} \quad (8)$$

Приходимо до висновку, що число  $l$  не може змінюватися для даної механічної системи і є її характерною константою. Менша кількість параметрів недостатня для опису системи, більша ж кількість - не потрібна. Про систему, для однозначного визначення конфігурації якої необхідно й достатньо задати  $l$  параметрів, кажуть, що вона має « $l$  ступенів вільності»; а самі параметри, як уже зазначалось, називаються «узагальненими координатами» системи. Число частинок, що утворюють механічну систему (а також їх координати) несуттєві при аналітичному методі дослідження, важливі лише узагальнені координати і деякі певні функції від них. Тверде тіло, наприклад, може складатися з нескінченної кількості частинок, а з точки зору механіки - це система, що має не більше ніж 6 незалежних координат.

У механіці Ньютона тверде тіло потрібно уявно розбити на достатньо малі частини, які можна розглядати як матеріальні точки, і для кожної такої точки - застосовувати другий закон Ньютона, у якому потрібно врахувати й невідомі сили взаємодії між окремими такими точками. Останнє робить неможливим розв'язання задачі про рух твердого тіла лише за допомогою другого закону Ньютона. Отже, разом зі студентами бачимо, що перевага переходу до узагальнених координат стає очевидною за умови, якщо буде встановлена можливість записати рівняння для визначення закону зміни у часі узагальнених координат. Зрозуміло, що закони Ньютона у загальному випадку не виражаються через узагальнені координати і потрібно шукати інші шляхи.

Слід звернути увагу студентів на те, що узагальнені координати не обов'язково повинні мати геометричний зміст. Необхідно, однак, щоб функції (8) були обмежені, однозначні, неперервні і мали похідні, і щоб рівняння (8) були сумісні. Ці умови інколи можуть порушуватися в деяких особливих точках, які потрібно виключити з дослідження. Крім цих обмежень слід звернути увагу на те, що діапазон безперервної зміни змінних  $q_1, q_2, \dots, q_l$  повинен допускати зміни первинних прямокутних координат у досить широких межах, не обмежуючи їх більше, ніж цього вимагають викладені кінематичні умови.

Отже, проблеми вивчення руху аналітичними методами вимагають узагальнення вихідної концепції декартових координат. У якості системи координат може бути обрана будь-яка сукупність параметрів (узагальнених координат), що характеризує стан механічної системи.

Вибір узагальнених координат надає нову можливість в описанні руху як вільної механічної системи  $N$  матеріальних точок, так і такої ж системи, на яку накладено  $k$  утримуючих голономних в'язей. Далі пропонується розглянути останній випадок. Така система має  $(3N - k)$  ступенів вільності, отже її положення у просторі можна характеризувати не лише  $3N$  декартовими координатами, але й  $(3N - k = l) < 3N$  узагальненими координатами. Зменшення кількості координат, які описують конфігурацію системи – це вже спрощення задачі про рух системи, але введення узагальнених координат ще дозволяє створити зручний геометричний образ руху такої системи. Дійсно, введемо математичну абстракцію (її зазвичай називають конфігураційний простір) – багатовимірний простір, у якому ортогональними осями є всі узагальнені координати. Точка у такому просторі зображує не матеріальну частинку, а всі узагальнені координати у даний момент часу, тобто конфігурацію досліджуваної системи. Оскільки частинки реальної системи рухаються, то змінюються узагальнені координати і точка в конфігураційному просторі (часто називають навпаки – простір конфігурацій) рухається. Наголошуємо, що її траєкторія описує конфігурацію всієї механічної системи протягом часу спостереження. При дослідженні деяких систем буває зручним ввести ще одну координату –  $t$  (час) і тоді у такому розширеному  $(l+1)$ -вимірному конфігураційному просторі траєкторія буде відображати залежність усіх узагальнених координат від часу, тобто – рівняння

$$q_s = q_s(t), \quad s = 1, 2, \dots, l, \quad (9)$$

що є рівняннями руху механічної системи в узагальнених координатах. Якщо такі рівняння знайдені, то з (8) знаходяться всі  $r_i = r_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , а потім із другого закону Ньютона визначаються всі реакції в'язей.

Отже, зауважимо, що основна задача динаміки зв'язаних систем може бути вирішена. Але ми стикаємось із проблемою встановлення конфігураційної траєкторії, тобто знову стоїть питання про пошук диференціальних рівнянь руху системи, інтегрування яких і визначить рівняння (9).

Необхідно відзначити, що при елементарному векторному підході до механіки метод Ньютона, за суттю, є істотно геометричним, він базується на застосуванні законів Ньютона, в якому абстрактна концепція декартових координат в описанні простору Евклідовою геометрією є лише засобом, за допомогою якого виражаються динамічні характеристики частинок.

Векторні методи надзвичайно корисні у задачах статки. Однак у динаміці число задач, які можуть бути розв'язані чисто векторними методами, порівняно велике. При розв'язанні задач на дослідження складних систем геометричний підхід векторної механіки Ньютона виявляється обмеженим і змушений поступитися дорогою більш абстрактному аналітичному підходу. При такому аналітичному обґрунтуванні механіки поняття координат в найбільш загальному сенсі займає вже центральне місце і потребує узагальнення.

Отже, слід звернути увагу студентів на те, що аналітична механіка є суто математичною наукою. Тут все проводиться шляхом обчислень математичних величин в абстрактній області. Фізичний світ переводиться на мову математичних співвідношень, і цей переклад здійснюється за допомогою координат. Координати встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками фізичного простору, які включають матеріальні частинки з їх динамічними характеристиками, і числами. Після встановлення цієї відповідності аналітична механіка оперує з координатами як із алгебраїчними величинами, забуваючи про їх фізичний зміст. Кінцевий результат подібних математичних обчислень потім переводиться назад у світ фізичних реалій.

## ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У статті наведено деякі методичні аспекти навчання теми «Узагальнені координати», що є складовою курсу «Класична механіка», який вивчається на першому (бакалаврському) рівні вищої освіти. Як показує досвід викладання класичної механіки, розглянута методика дозволяє сформулювати у студентів достатньо глибоке й стійке розуміння поняття «узагальнені координати» та дозволяє створити геометричний образ еволюції механічної системи у вигляді траєкторії точки у конфігураційному просторі. Подальші дослідження будуть спрямовані на методику навчання основ аналітичної механіки у педагогічному університеті.

## Список використаних джерел

1. Мороз І. О. Фундаменталізація навчальних курсів у педагогічних університетах. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3 : Фізика і математика у вищій і середній школі*, 2012. Вип. 10. С. 78-85.
2. Бондаренко А. А., Дубінін О. О., Переяславцев О. М. *Теоретична механіка: Підручник: У 2 ч. Ч.2: Динаміка*. Київ: «Знання», 2004. 590 с.
3. Булаков В. М., Яременко В. В., Черниш О. М., Березовий М. Г. *Теоретична механіка: підручник*. Київ: ЦУЛ, 2017. 640 с.
4. Іванов Б. О., Максютя М. В. *Конспект лекцій із теоретичної механіки: навчальний посібник*. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. 207 с.
5. Ежов С. М., Макарець М. В., Романенко О. В. *Класична механіка*. Київ: Фізичний факультет, 2007. 399 с.
6. Литвинов О. І., Михайлович Я. М., Бойко А. В., Березовий М. Г. *Теоретична механіка Ч. II. Динаміка. Основи аналітичної механіки*. Київ: Агроосвіта, 2013. 576 с.

## References

1. Moroz, I. O. (2012) Fundamentalizacija navchalnykh kursiv u pedagogichnykh universytetakh [Fundamentalization of training courses at pedagogical universities]. *Naukovy chasopys Nacionalnogo pedagogichnogho universytetu imeni M.P. Draghomanova. Serija 3: Fyzyka i matematyka u vyshhij i serednij shkoli*. Vyp. 10. S. 78-85. [in Ukrainian].

2. Bondarenko, A. A., Dubinin, O. O., Perejaslavcev, O. M. (2004) *Teoretychna mekhanika: Pidruchnyk: U 2 ch. Ch.2: Dynamika [Theoretical mechanics: Textbook: In 2 parts Part 2: Dynamics]*. Kyjiv: Znannja, 590 s. [in Ukrainian].
3. Bulghakov, V. M., Jaremenko, V. V., Chernysh, O. M., Berezovyy, M. Gh. *Teoretychna mekhanika: pidruchnyk [Theoretical mechanics: textbook]*. Kyjiv: CUL, 640 s. [in Ukrainian].
4. Ivanov, B. O., Maksjuta, M. V. (2012) *Konspekt lekcij iz teoretychnoji mekhaniky: navchalnyj posibnyk [Synopsis of lectures on theoretical mechanics: tutorial]*. Kyjiv: Vydavnycho-polighrafichnyj centr «Kyjivskij universytet», 207 s. [in Ukrainian].
5. Jezhov, S. M., Makarec, M. V., Romanenko, O. V. (2007) *Klasychna mekhanika*. Kyjiv: Fizychnyj fakul'tet, 399 s. [in Ukrainian].
6. Lytvynov O. I., Mykhajlovych Ja. M., Bojko A. V. & Berezovyy M. Gh. (2013) *Teoretychna mekhanika Ch. II. Dynamika [Theoretical mechanics Ch. II. Dynamics. Fundamentals of Analytical Mechanics]*. Osnovy analitychnoji mekhaniky / Kyjiv: Aghroosvita, 2013. 576 s. [in Ukrainian].

#### METHODOLOGICAL ASPECTS OF TEACHING «GENERALIZED COORDINATES»

*Olena Zavrazhna*

*Makarenko Sumy State Pedagogical University, Ukraine*

##### **Abstract.**

**Formulation of the problem.** While preparing physics and mathematics specialists, and in particular physics teachers, it should be paid attention to the general principles, which in a compact form contain not only all known experimental and theoretical positions, but also allow predicting new discoveries. These principles include integral variational principles that were first formulated in mechanics. Preparing physics teachers', the principles are studied in the theoretical physics course in its first section – "Classical mechanics". Unlike the general course "Mechanics", where students only deepen their school knowledge, while studying classical mechanics, at an initial stage - when formulating the starting points, they encounter many generalized and abstract concepts, for example, generalized coordinates, which formation puts many methodological problems before the teachers that should be solved.

**Materials and methods.** The following methods were used for research: systematic scientific and methodological analysis of textbooks and manuals, articles on the research problem; observation of the educational process; synthesis, comparison and generalization of theoretical positions, discovered in the scientific and educational literature; generalization of own pedagogical experience.

**Results.** One of the possible substantiation variants of the main mechanics task of related systems is offered, which the authors use at the first lectures on classical mechanics.

**Conclusion.** The considered method allows students to form sufficiently deep and stable understanding of the notion of generalized coordinates and, allows you to create a geometric image of the evolution of the mechanical system in the form of a point trajectory in the configuration space. Further research will be aimed at highlighting the methodological aspects of teaching analytical mechanics at the pedagogical university.

**Key words:** future physics teachers, classical mechanics, cartesian coordinates, generalized coordinates, mechanical system.